



TITLE:

幾何学的に見た周期倍分岐(モレキ
ュール「多自由度の力学系と幾何
学」,研究会報告)

AUTHOR(S):

本池, 巧; 有光, 敏彦

CITATION:

本池, 巧 ...[et al]. 幾何学的に見た周期倍分岐(モレキュール「多自由度
の力学系と幾何学」,研究会報告). 物性研究 1995, 64(4): 434-443

ISSUE DATE:

1995-07-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95556>

RIGHT:

幾何学的に見た周期倍分岐

本池 巧, 有光 敏彦*

湘北短期大学 電情, *筑波大学 物理

1 はじめに

連続時間パラメータを持つ力学系における分岐現象等を解析する際, ポアンカレ写像を用いて系を離散化する, という手法がよく用いられる. 連続系を離散化することで, 既に確立されている離散力学系の理論が利用可能となり, それによって我々は, 系について多くの情報を得ることができる. しかし一方で, 離散化のために元の系の流れに関する情報の多くが失われるという問題が生じる. 例えば, 連続系での周期軌道は, 位相空間上の閉曲線であるが, 離散化された系では単なる点集合となってしまう. そのため, 系の離散化では周期軌道の安定性などの解析は可能だが, 位相空間中での絡みなど, 軌道の高次元の構造は解析不可能である.

連続系を離散化しないアプローチの一つに, 3次元の力学系の周期軌道を3次元空間上の結び目とみなし, 軌道を結び目のトポロジーによって解析するものがある [2, 3]. この流れとして, 上江洸, 相沢らは, 軌道の周りの流れの不安定方向のベクトルを利用し軌道の, 絡み数などのトポロジカルな量を導き出している [1, 4, 5]. また一方で, Holmes らは流れを horseshoe template という2次元多様体上に縮約し, 軌道を記号化した上で, 記号力学を用いて解析している [6, 7]. Gilmore, Mindlin らはストレンジアトラクタのトポロジカルな構造を不安定周期軌道のトポロジーから導き出そうとしている [8].

我々が, ここで示す局所交差数による解析方法は, 上江洸, 相沢らおよび Holmes ら二つの解析方法の長所を取り入れ, 実験的に観測可能で, しかも記号力学を用いた厳密な解析が行えるものである.

2 考察するモデル

我々は, 以下の周期的外力が加わった, 2次元の非自励系を考える.

$$\dot{u} = f_1(u, v, \theta, \mu), \quad \dot{v} = f_2(u, v, \theta, \mu), \quad \dot{\theta} = 1, \quad (1)$$

ここで, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in S^1$ そして μ は系の制御パラメータとする. 更に, f_1, f_2 に, 次の条件を課す.

1. f_1 と f_2 は θ に関して周期 T の周期関数.
2. f_1 は v に関して単調関数.

このようにして、特徴づけられた力学系には以下のような特徴がある. 一つは、周期的外力が加えられていることより、系の周期軌道の周期を簡単に決定可能であり、しかも、軌道の組ひも表示を簡単に得ることが可能であること. もう一つは、 f_1 が v に関して単調であることから、軌道を (u, θ) 平面へ正射影した際に、絡み方が一通りである. このようなひもは、結び目理論では positive braid と呼ばれ、結び目のなかでも、比較的解析しやすい部類に属する.

1,2. の制限により、この系の周期軌道は、トポロジカルな解析が行いやすいものとなる. かといって、我々は特殊なクラスの力学系を取り扱っているのではなく、振り子の強制振動など多くの物理系がこの条件を満たすことを強調したい.

3 局所交差数による解析

3.1 周期軌道の周期倍分岐

周期倍分岐現象では、周期軌道 p_0 が不安定化し分岐を起こすと、新たに発生した分岐軌道 p_1 は、元の軌道 p_0 の周りの流れの不安定方向に現れる. そのため、分岐後の軌道 p_1 は、分岐前の軌道 p_0 自身の絡みと分岐前の軌道の不安定方向のねじれによる絡みの、二つの構造をもつことになる. このような軌道を結び目として見た場合、ほとんどの場合、軌道は自明でないトーラス上のトーラス結び目と見なせる.

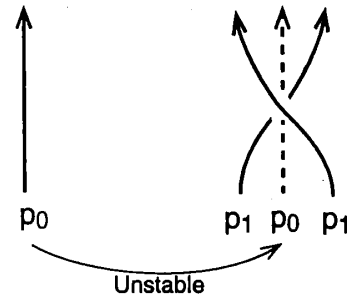


図 1: 軌道の分岐

3.2 局所交差数

いま考察している系では、軌道の射影平面上での交差は 1 種類のみである. 従って、交差点の平面上の配位から、もとの軌道を再構成可能である. しかし、周期倍分岐での交差点数は、分岐につれて爆発的に増加するため、交差点を利用した軌道の解析は技術的に困難を伴う. そこで、われわれは、絡みが入れ子構造になっていることを利用し、全ての絡みを考慮しないで、不安定方向の捻りから新たに発生した交点のみを用いて解析を行うことにした. この量を局所交差数と名付け、以下のように定義する.

2^n 周期軌道 p_n の局所交差数 C_n とは、 2^{n-1} 周期軌道 p_{n-1} の周りの管状近傍に沿った、 2^n 周期分岐軌道 p_n の half twist の総数とする. 表 1 は、幾つかのシステムの周期倍分岐で得られた局所交差数列である.

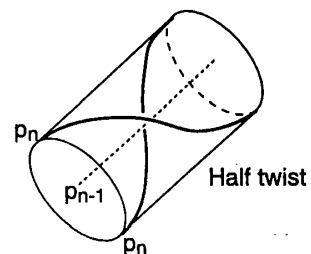


表 1: 幾つかの系の周期倍分岐で得られる局所交差数列

モデル	初期周期	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	ξ	η
損失変調 レーザモデル	1	1	3	5	11	21	2	1
	2	1	3	5	11	21	2	1
	3	1	3	5	11	21	2	1
Non-linear Mathieu	1	3	5	11	21	43	2	3
	2	3	7	13	27	53	4	3
Double-well Duffing	1	1	3	5	11	21	2	1
Single-well Duffing	1	5	9	19	37	75	4	5
	3	15	31	61	123	255	16	15

当然ながら、局所交差数単独では、軌道の特徴づけることは不可能であり、 2^n 周期軌道を記述するには $2 \sim 2^n$ 周期までの n 個の局所交差数の列 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ が必要になる。一見、問題の複雑さは、それほど軽減されていないように見えるが、後で述べる、局所交差数列に対し普遍的に成り立つ漸化式より、周期軌道の記述が容易なものとなる。そこで、普遍則について考察する前に、まず局所交差数列 $\{C_n\}$ から、軌道のトポロジカルな量がどのように導かれるかをみる。

4 結び目のトポロジカルな量の漸化式

4.1 交差数

図 2 より、一つの交差点は分岐すると 4 つの交差点になることから、

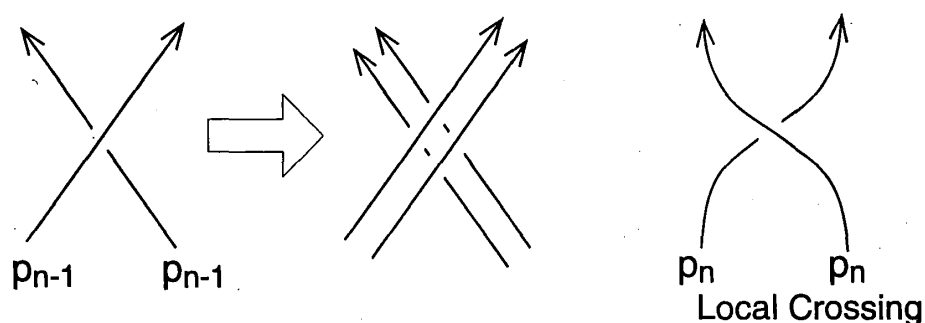


図 2: 分岐での交差数の変化

2^n 周期軌道の交差数 c_n と分岐後の 2^{n+1} 周期軌道の交差数 c_{n+1} には、次の漸化式が成り立つ。

$$c_{n+1} = 4c_n + C_{n+1}, \quad n \geq 0 \quad (2)$$

4.2 リンク数

2^{n+1} 周期軌道 p_{n+1} と 2^n 周期軌道 p_n のリンク数 $\ell_{n+1,n}$ は,

$$\ell_{n+1,n} = -\frac{1}{4\pi} \int_{p_{n+1}} \int_{p_n} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \quad (3)$$

で与えられる.

我々の考えている系では, 交差点は 1 種類なので, リンク数の正負を無視して考えてよく, その際には, リンク数 $\ell_{n+1,n}$ は, p_{n+1} と p_n との間の交差点の数の $1/2$ となる. 従って, 図 3 から,

$$\ell_{n+1,n} = 2c_n + C_{n+1}, \quad n \geq 0 \quad (4)$$

が得られる. 更に次のように, リンク数だけで閉じた形式にも書き下すことも可能である.

$$\ell_{n+2,n+1} = 3\ell_{n+1,n} + 4\ell_{n,n-1} \quad n \geq 1 \quad (5)$$

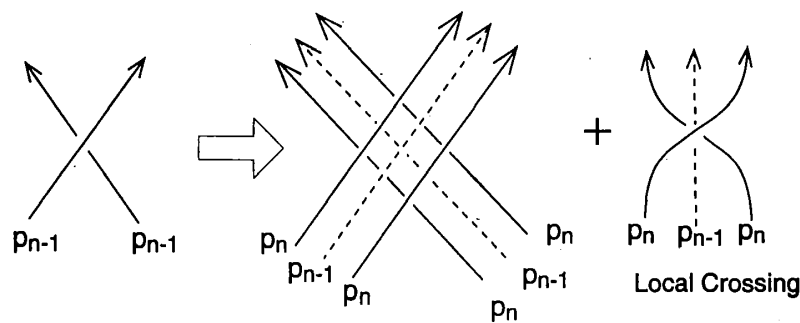


図 3: 分岐でのリンク数の変化

4.3 種数

どのような結び目に対しても, 結び目を境界に持つ有向曲面が構成可能である. この曲面のことを Seifert 曲面と呼び, それは, 複数の円盤と, それらをつなぐ帯からなる. 結び目の種数とは, 結び目の Seifert 曲面の種数によって与えられる.

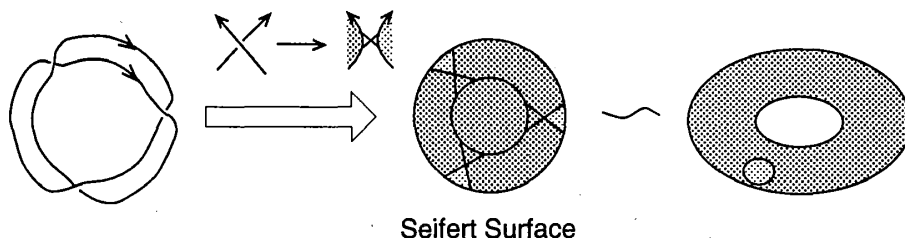


図 4: 結び目の Seifert 曲面

種数の分岐後の変化を考えると、分岐前の交差点から発生した交差では、分岐前と同じ構造の Seifert 面が 2 つ複製され、この二つの面は図 5 のように、二つの帯で結ばれる。

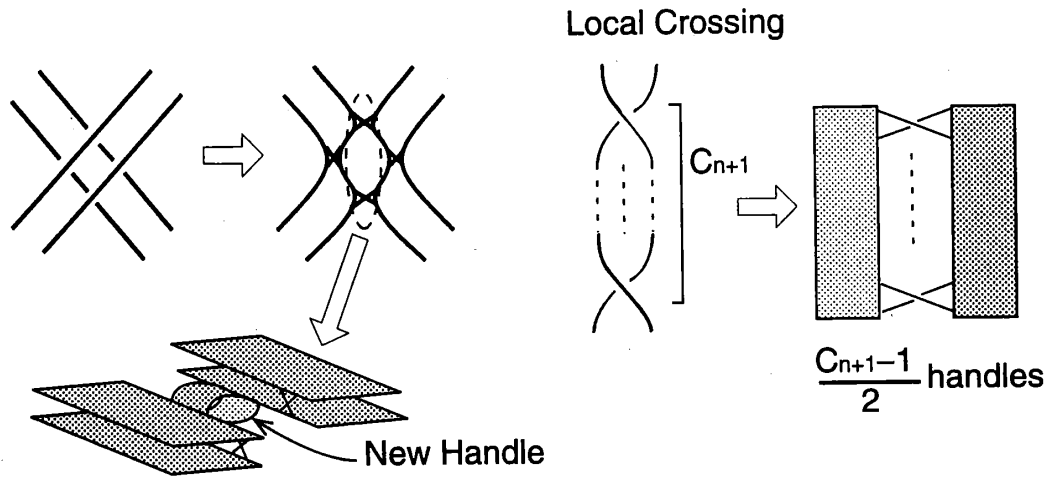


図 5: 分岐軌道の Seifert 面

従って、この部分の分岐後の種数への寄与は $2g_n + c_n$ である。次に、分岐軌道の捻れの部分では、2 つの面が C_{n+1} 個の帯で結ばれる。二つを合わせて、 2^n 周期軌道の種数 g_n に対し、

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= 2g_n + c_n + G_{n+1}, \quad n \geq 1 \\ G_{n+1} &= \frac{C_{n+1} - 1}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

という漸化式が得られる。

4.4 ザイフェルトグラフ

ザイフェルト曲面の円盤を点、帯を線として作成した平面グラフをザイフェルトグラフと呼ぶ。

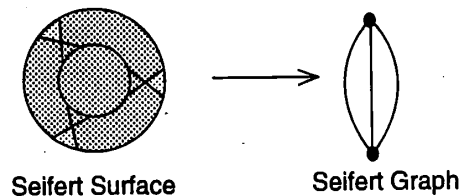


図 6: ザイフェルトグラフ

周期倍分岐後のザイフェルトグラフのうち、分岐軌道の捻れから生じる部分を除いたものは、図 7 のように、まず、二つの点を結ぶ線を、間に二つの点とそれを結ぶ二つの線に置き換え、次に、同じ点から発生した線の両端をすべて同じ点にまとめる操作で得られる。

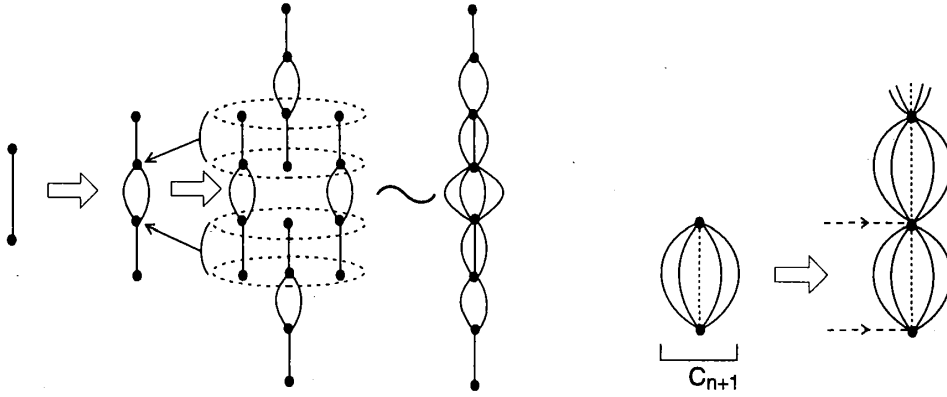


図 7: ザイフェルトグラフの分岐

分岐軌道の捻れのザイフェルトグラフへの寄与は、図 7 のように、2 点を C_{n+1} 本の線で結ぶグラフである。このグラフを、捻れを除いたグラフ上の隣り合う 2 点に結合させることにより、分岐軌道全体のグラフが得られる。

我々の考えている軌道は、ほとんどが自明でないトーラス上のトーラス結び目であるが、今、自明でないトーラスのことを忘れ、分岐軌道の捻れによるグラフのみを考えると、このグラフの示す結び目の種数は、(6) で定義された G_{n+1} となり、さらに、このグラフに対する Alexander 多項式は

$$\Delta_{n+1}(t) = t^{-\frac{C_{n+1}-1}{2}} (1 - t + t^2 + \cdots + t^{C_{n+1}-1}) \quad (7)$$

で与えられる。

5 局所交差数とパワースペクトルの関係

パワースペクトルは時系列解析の最も基本的な解析方法である。我々の局所交差数による解析の有用な点の一つは、局所交差数をパワースペクトルから直に読みとれることである。そのために、まず 2^n 周期軌道の x 成分 $u_n(t)$ に対して、 δu_n を

$$\delta u_n(t) = u_n(t + 2^{n-1}T) - u_n(t) \quad (8)$$

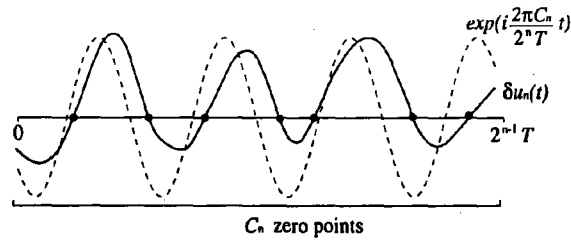
と定義する。すると δu_n は $\frac{2\pi k}{2^n T}$ (k は奇数) のモードのみを含むことがわかる。

C_n の定義と照らし合わせると、

$$C_n = \delta u_n(t) \text{ の } [0, 2^{n-1}T] \text{ における零点の数,} \quad (9)$$

という関係が得られる。

一方、外力として、正弦波のような滑らかなものを仮定すると、 δu_n の零点は区間 $[0, 2^{n-1}T]$ に、ほぼ均一に散らばる (f_1, f_2 の時間変化は T のオーダーとする) と考えられる [11]。

図 8: δu_n の零点

従って、パワースペクトル中の主要なモードは C_n 個の零点を持つもの、つまり $\frac{2\pi C_n}{2^n T}$ の振動モードである。

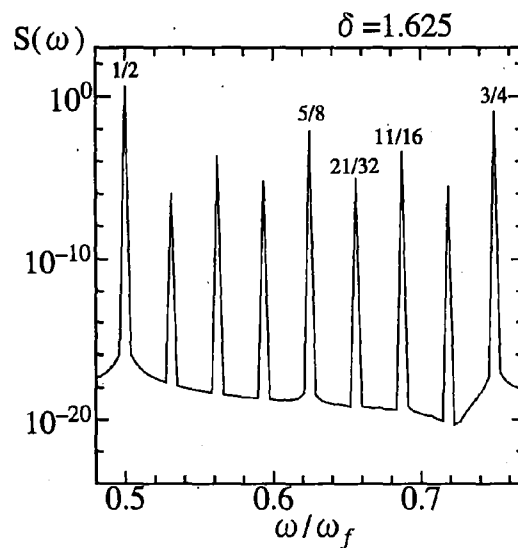
幾つかの系の $\delta u_n(t)$ のパワースペクトルを詳しく解析すると、 δS_{n+2} の極大モードは、 δS_{n+1} と δS_n それぞれの極大モードの中点に現れるという、法則が発見できる。式で表すと

$$\frac{2\pi C_{n+2}}{2^{n+2}T} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi C_{n+1}}{2^{n+1}T} + \frac{2\pi C_n}{2^n T} \right) \quad (10)$$

となるが、このパワースペクトルの構造は、幾つかのシステムで検証すると、システムによらない普遍則になっている。 2^n 周期軌道の u_n のパワースペクトル $S_n(\omega)$ と、 δu_n のパワースペクトル $\delta S_n(\omega)$ の間には近似的に

$$S_n(\omega) = \sum_{\ell=0}^n \delta S_\ell(\omega) \quad (11)$$

が成り立つことを利用すると、 u_n のパワースペクトル $S_n(\omega)$ からでも、各モードの極大点に対する普遍則を見ることができる。

図 9: 2^n 成分の極大モードの位置 (レーザモデルの 32 周期軌道)

6 局所交差数のユニバーサリティ

パワースペクトルの入れ子構造を示す (10) 式から, 周期倍分岐の局所交差数 C_n に関して, システムに依存しない関係式

$$C_{n+2} = C_{n+1} + 2C_n \quad (12)$$

を導くことが可能である. これを解くと

$$C_n = 2\lambda_{n-2}C_1 + \lambda_{n-1}C_2, \quad (13)$$

ただし,

$$\lambda_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n). \quad (14)$$

このことは局所交差数は C_1, C_2 によって決定されることを意味する. 更には, 既に導いた幾つかの軌道のトポロジカルな量に対する漸化式から, 周期倍分岐軌道のトポロジカルな性質は C_1, C_2 によって決定されることが明らかになる.

7 Horseshoe Template による解析

我々は, 局所交差数に対する漸化式 (12) をパワースペクトルの構造から引き出した. Holmes らが提出した horseshoe template 理論を元に解析することで, 独立にこの漸化式を導き出すことが可能である.

Holmes らは, 馬蹄形写像を 3 次元の流れに拡張し, 流れの安定方向に縮約し, 図 10 の形の, 二つの取手のある 2 次元の多様体を作成した [6, 7].

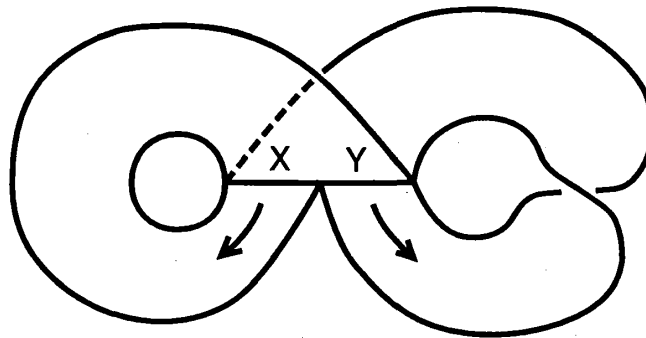


図 10: horseshoe template

7.1 記号力学による取扱い

Holmes らの解析に従い, まず template 上の周期軌道を, 次の規則で記号化する:

$$\begin{aligned} \text{軌道が捻れのない帯を回る} &\longrightarrow x \\ \text{軌道が捻れている帯を回る} &\longrightarrow y. \end{aligned}$$

Template の分岐線上の 1 次元写像を考え, その上で x, y の 2 文字の記号力学を利用すると, 2^n 周期軌道を記述するワード W_n は

周期	1	2	4	8	...	2^n	...
ワード (W_n)	y	xy	xy^3	$xy^3(xy)^2$...	$W_{n-1}(W_{n-2})^2$...

で与えられる. ワード W_n 中の文字 x, y の個数をそれぞれ x_n, y_n とすると,

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \quad (15)$$

$$y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n \quad (16)$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad (17)$$

これを解いて

$$x_n = \lambda_n \quad (18)$$

$$y_n = \lambda_{n+1} \quad (19)$$

を得る. y の方の帯を回る軌道は分岐すると, 一つの局所交差を生むことに留意すると, 局所交差数は

$$C_n = y_{n-1} \quad (20)$$

で与えられ, (17) からすぐに漸化式 (12) が導かれる. このようにシステムの流れに template の構造を仮定することで, 局所交差数の漸化式 (12) が自然に導かれる.

ただし, Holmes の template では, 全ての倍分岐の局所交差数列を説明することができないので, x の帯に ξ 個, y の帯に η 個 (ξ は偶数, η は奇数) の捻りを入れる拡張が必要である. 拡張された template では局所交差数とワードの関係は,

$$C_n = \xi x_{n-1} + \eta y_{n-1} \quad (21)$$

となる. 更に詳しい template の拡張に関する議論は, [10] を参考にされたい.

8 まとめ

我々は、周期倍分岐において、分岐後の軌道の捻れを表す局所交差数という量を導入し、それを用いて、交差数など軌道の様々なトポロジカルな量が、導き出せることを示した。局所交差数は、時系列のパワースペクトルからも直接読み取れる量であり、数値シミュレーションだけでなく、実験系においても、この量を使って周期運動のトポロジカルな解析が十分可能になると思われる。周期倍分岐で得られる局所交差数の列には系によらない漸化式が成り立っており、周期倍分岐はたとえば2倍分岐と4倍分岐の局所交差数の情報によって決定されることが示される。周期倍分岐は二つのパラメータ (ξ, η) で特徴づけられる。共存する幾つかの周期倍分岐の分類などに際し、パラメータによるこの特徴づけは有力である。また、システムの制御などにも有効であることが期待される。

参考文献

- [1] T. Uezu and Y. Aizawa 1982 *Prog. Theor. Phys.* **68** 1907
- [2] P. Beiersdorfer, J-M. Wersinger and Y. Treve 1983 *Phys. Lett.* **96A** 269
- [3] J. D. Crawford and S. Omohundro 1984 *Physica* **13D** 161
- [4] T. Uezu, *Phys. Lett. A* **93** (1983) 161.
- [5] T. Uezu 1990 *Prog. Theor. Phys.* **83** 850
- [6] P. Holmes and R. F. Williams 1985 *Arch. Rat. Mech. and Anal.* **90** 115
- [7] P. Holmes 1986 *Physica* **21D** 7
- [8] G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore and X.-J. Hou, *J. Nonlinear Sci.* **1** (1991) 147.
- [9] T. Motoike, T. Arimitsu and H. Konno, *Phys. Lett. A* **182** (1993) 373.
- [10] T. Arimitsu and T. Motoike, *Generalized Template for Period Doublings*, (1994) preprint Univ. of Tsukuba.
- [11] T. Arimitsu and T. Motoike, *A Universality of Period Doubling Bifurcations*, *Physica D* (1995) in press.